ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

Часть I

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Методическое пособие

НОВОСИБИРСК
2010

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

№ 3944

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА

ЧАСТЬ I

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Методическое пособие для студентов II−III курсов
специальностей 160201, 160202, 160901, 160702,
280202, 140401 (направление 160100) ФЛА;
специальностей 260501, 260202, 080401 ЭМФ;
специальности 260601 МТФ всех форм обучения и ЗОТФ.

НОВОСИБИРСК
2010

УДК 536.2(07)
Т 343

Составители: доктор техн. наук, проф. *Ю.В. Дьяченко*
канд. физ.-мат. наук, доц. *М.С. Макаров*
доктор физ.-мат. наук, проф. *М.А. Пахомов*

Рецензент доктор техн. наук, проф. *А.В. Чичиндаев*

Работа подготовлена на кафедре технической теплофизики

ВВЕДЕНИЕ

Теплопередача (теория теплообмена) – это учение о самопроизвольных процессах переноса теплоты в пространстве. Потенциалом переноса теплоты является разность температур. Теплообмен является основой многих явлений, наблюдаемых в природе и реализуемых в технике. Целый ряд важных вопросов конструирования и создания тепловых устройств, технологических процессов, летательных аппаратов и особенно их силовых установок решается на основе теории теплообмена.

В теории теплообмена под процессом переноса теплоты понимается процесс обмена внутренней энергией между телами или элементами одного тела в форме теплоты.

Любой процесс переноса теплоты в пространстве называется теплообменом. Теплообмен – сложное явление, которое можно расчленить на ряд простых (элементарных) способов. Теплота может передаваться тремя простыми принципиально отличными друг от друга способами: **теплопроводностью, конвективным переносом и излучением**.

Явление теплопроводности состоит в переносе теплоты структурными частицами вещества – молекулами, атомами, электронами – в процессе их теплового движения. Такой теплообмен может происходить в любых телах с неоднородным распределением температуры, но механизм переноса теплоты зависит от агрегатного состояния тела.

Конвективный теплообмен – это процесс переноса теплоты перемещающимися объемами (молями) жидкости или газа. Объемы жидкости или газа, перемещаясь из области с большей температурой в область с меньшей температурой, переносят с собой теплоту. Явление конвективного переноса теплоты наблюдается лишь в текучих средах (жидкостях и газах) и может осуществляться в результате свободного или вынужденного движения.

Свободное движение (**свободная конвекция**) возникает тогда, когда частицы жидкости в различных участках системы находятся под воздействием массовых сил. В гравитационном поле неоднородность плотности, возникающая при неравномерном нагреве частей системы, вызывает свободное движение.

Вынужденное движение (**вынужденная конвекция**) происходит под действием внешних поверхностных сил. Разность давлений, под действием которой перемещается теплоноситель, создается с помощью вентиляторов, насосов, эжекторов и других устройств.

Теплообмен излучением (или радиационный теплообмен) состоит из излучения энергии телом, ее распространения в пространстве между телами и поглощения ее другими телами. В процессе испускания внутренняя энергия излучающего тела превращается в энергию электромагнитных волн, которые распространяются во всех направлениях. Тела, расположенные на пути распространения энергии излучения, поглощают часть падающих на них электромагнитных волн, и таким образом энергия излучения превращается во внутреннюю энергию поглощающего тела.

В настоящем методическом пособии подробно рассматривается только процесс теплопроводности.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Физический механизм процесса теплопроводности зависит от фазового состояния и структуры вещества. В жидкостях и твердых телах (диэлектриках) – перенос теплоты осуществляется путем непосредственной передачи теплового движения молекул и атомов соседним частицам вещества. Также теплота передается в основном теплопроводностью от стенки (или к ней) в очень тонком движущемся пристенном слое газа (жидкости).

В газообразных телах распространение теплоты теплопроводностью происходит вследствие обмена энергией при соударении молекул, имеющих различную скорость теплового движения.

В металлах теплопроводность осуществляется главным образом вследствие движения свободных электронов.

Температурное состояние тела или системы тел можно охарактеризовать с помощью **температурного поля**, под которым понимается совокупность мгновенных значений температур во всех точках изучаемого пространства. Оно возникает при контакте двух тел, имеющих разную температуру или в пределах одного тела с участками с различной температурой.

Количество теплоты, передаваемой в единицу времени через произвольную поверхность, называется **тепловым потоком и обозначается** $Q,\ [Дж/с]$. Тепловой поток, отнесенный к единице площади поверхности, **называется плотностью теплового потока, или тепловой нагрузкой** $q,\ [Дж/с\cdot м^2 = Вт/м^2]$. Тепловой поток и плотность теплового потока являются векторными величинами, т.е. характеризуются направлением и величиной (модулем вектора). Тепловые потоки возникают в телах и между телами только при наличии разности температур.

Температура различных точек тела определяется координатами и временем:

$$t = f(x, y, z, \tau)\,. \qquad (1)$$

Температурное поле, которое изменяется во времени, называется **нестационарным (неустановившимся)**. Если температура не изменяется во времени, температурное поле называется **стационарным (установившимся)**. Стационарное трехмерное температурное поле $t = f(x, y, z)$.

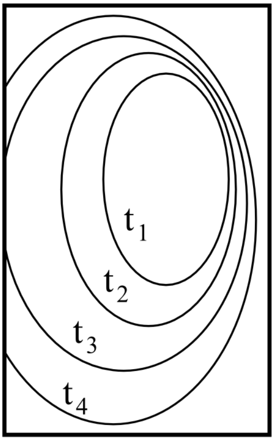

Рис. 1 Изотермы

Если температура изменяется только по двум координатам, то такое поле называется плоским (двумерным): $t = f(x, y, \tau)$, или $t = f(x, y)$, или $t = f(x, z)$ и т.д. Если температура изменяется только по одной координате, то такое поле называется линейным (одномерным).

Точки трехмерного температурного поля, имеющие одинаковую температуру, формируют **изотермические поверхности**. Под изотермической поверхностью понимается геометрическое место точек с одинаковой температурой. Изотермические поверхности могут быть замкнуты или заканчиваться на границах тела. Изотермические поверхности, соответствующие разным температурам, не могут пересекаться друг с другом. Если тело рассечь плоскостью, то изотермические поверхности на этой плоскости изобразятся в виде их следов - изотермических линий, которые называются **изотермами**. Изотермы обладают такими же свойствами как изотермические поверхности (рис. 1).

1.1. Температурный градиент

Рассмотрим семейство изотерм (см. рис. 2). Выберем произвольно на изотерме t точку 1 и проведем через нее нормаль к изотерме в сторону увеличения температуры. Тогда увеличение температуры на Δt будет происходить на расстоянии Δn. Отношение $\Delta t/\Delta n$ характеризует интенсивность изменения температуры на данном участке. Предел этого отношения при $\Delta n \to 0$ будет характеризовать изменение температуры по расстоянию вблизи точки 1:

$$\lim_{\Delta n \to 0}\left(\frac{\Delta t}{\Delta n}\right) = \frac{\partial t}{\partial n} = grad\,(t)\,. \qquad (2)$$

Производная температуры по нормали к изотермической поверхности называется температурным градиентом. **Температурный градиент** - векторная величина, направленная по нормали к изотерме в сторону увеличения температуры. Температурный градиент характеризует максимальную скорость изменения температуры по направлению, т.к. при любом другом направлении кроме нормали изменение температуры на Δt будет приходится на расстояние большее, чем Δn.

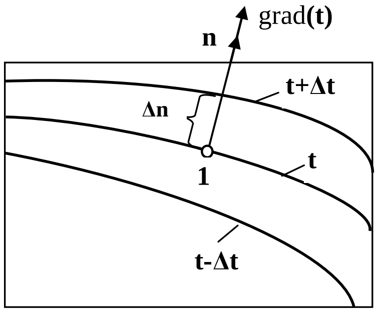

Рис. 2 Градиент температуры

В случае пространственного поля температур температурный градиент определяется по направлению нормали к изотермической поверхности. Вектор градиента температур раскладывается в проекции на оси координат:

$$\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial z} \tag{3}$$

1.2. Закон Фурье

Основным **законом теплопроводности** является предложенная Фурье гипотеза о пропорциональности плотности теплового потока температурному градиенту:

$$q = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right), \tag{4}$$

где: q - плотность теплового потока в процессе теплопроводности, λ, $[Вт / м \cdot град]$ - **коэффициент теплопроводности** (пропорциональности); $\partial t/\partial n$ - температурный градиент.

Для полного теплового потока закон Фурье записывается в дифференциальной форме следующим образом:

$$dQ = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right) dF d\tau, \quad [Дж], \tag{5}$$

где: dQ - тепловой поток, dF - элементарная площадь изотермической поверхности, $d\tau$ - время.

Знак минус вводится потому, что вектор градиента температур направлен в сторону увеличения температуры, а вектор теплового потока - в противоположную сторону (в сторону уменьшения температуры).

Коэффициент теплопроводности λ в законе Фурье является физической характеристикой вещества. Чем больше численное значение λ, тем выше способность вещества проводить теплоту. Величина коэффициента теплопроводности зависит от природы вещества, его структуры, температуры и других факторов.

В проекциях на оси координат уравнение (4) может быть записано следующим образом:

$$q_x = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right), q_y = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right), q_z = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right). \tag{6}$$

1.3. Коэффициент теплопроводности

Коэффициенты теплопроводности металлов и сплавов имеют значения от 7 до 490 $Вт/(м \cdot град)$. С увеличением температуры теплопроводность большинства металлов уменьшается.

При 0°С коэффициент теплопроводности меди - 390 $Вт/(м \cdot град)$, алюминия - 209 $Вт/(м \cdot град)$, железа - 74 $Вт/(м \cdot град)$.

Коэффициент теплопроводности смеси материалов обычно не изменяется пропорционально количеству входящих в смесь компонентов. Кроме того, он зависит от вида термической и механической обработки металла. Надежным способом оценки коэффициентов теплопроводности металлов и их сплавов является непосредственный эксперимент.

Неметаллические материалы имеют значительно меньшие величины - 0,023-2,9 $Вт/(м \cdot град)$. Среди них наибольший интерес представляют теплоизоляционные, керамические и строительные материалы. Большинство этих материалов имеет пористое строение, поэтому их коэффициент теплопроводности учитывает не только способность вещества проводить теплоту соприкосновением структурных частиц, но и радиационно-конвективный теплообмен в порах.

Материалы, имеющие $\lambda < 0,25$ Вт/м·град при $t = -50...100\ {}^0C$ называют **теплоизоляторами**. Некоторые теплоизолирующие материалы используются в их естественном состоянии, другие получаются искусственно.

Некоторые неметаллические материалы обладают анизотропией. Так, дуб проводит теплоту вдоль волокон примерно в два раза лучше, чем поперек волокон. Теплопроводность ориентированного пирографита вдоль пластины в сто раз больше, чем в перпендикулярном направлении.

Жидкости (кроме расплавленных металлов) имеют небольшую величину 0,093-0,7 $Вт/(м \cdot град)$. У большинства жидкостей (кроме воды и глицерина) коэффициент теплопроводности уменьшается с увеличением температуры.

Газы и пары плохо проводят теплоту теплопроводностью 0,006-0,58 $Вт/(м \cdot град)$. Коэффициенты теплопроводности газов увеличиваются с ростом температуры.

В практических расчетах коэффициент теплопроводности обычно считают одинаковым для всего тела и определяют его по среднеарифметической разности из крайних значений температур тела. При выборе коэффициента теплопроводности следует пользоваться справочной литературой.

Контрольные вопросы

1. Перечислить элементарные способы переноса теплоты.

2. Физический механизм переноса теплоты теплопроводностью.

3. Сформулировать определения теплового потока и плотности теплового потока, их размерность.

4. Стационарное и нестационарное температурное поле.

5. Изотермические поверхности, изотермы.

6. Температурный градиент, его размерность.

7. Закон Фурье, математическая формулировка.

8. Объяснить смысл знака «минус» в законе Фурье.

9. Коэффициент теплопроводности, его размерность.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Для решения задач определения температурного поля в процессах теплопроводности необходимо иметь дифференциальное уравнение энергии. Интегрируя это уравнение можно получить аналитические решения для типовых задач теплопроводности.

Для вывода уравнения необходимо принять ряд упрощающих допущений: 1. Тело однородно и изотропно; 2. Физические параметры тела постоянны; 3. Деформация за счет изменения температуры малы по сравнению с линейными размерами тела.

Выделим в рассматриваемом объекте контрольный объем (КО) в виде параллелепипеда с размерами граней dx, dy, dz (см. рис. 3). Грани ориентированы относительно осей координат (x, y, z). Общий баланс энергии КО складывается из теплот: подводимых, отводимых и внутренних тепловыделений. На основании закона сохранения энергии, баланс теплоты КО можно сформулировать следующим образом: накапливаемая в объеме теплота (разность между подводимой, отводимой и выделяемой от внутренних источников) расходуется на увеличение внутренней энергии или энтальпии объема.

Определим накопление энергии в КО - dQ_1 за счёт процессов теплопроводности. Разложим тепловой поток проходящий через контрольный объём - dQ в проекции на оси координат, тогда по оси (x) к левой грани за время $d\tau$ подводится в процессе теплопроводности теплота (dQ_x), соответственно по оси (y) - (dQ_y) и по оси (z) - (dQ_z). С противоположных граней КО будут отводится теплоты (dQ_{x+dx}), (dQ_{y+dy}) и (dQ_{z+dz}) соответственно. Таким образом:

$$dQ_1 = \left(dQ_x - dQ_{(x+dx)}\right) + \left(dQ_y - dQ_{(y+dy)}\right) + \left(dQ_z - dQ_{(z+dz)}\right). \qquad (7)$$

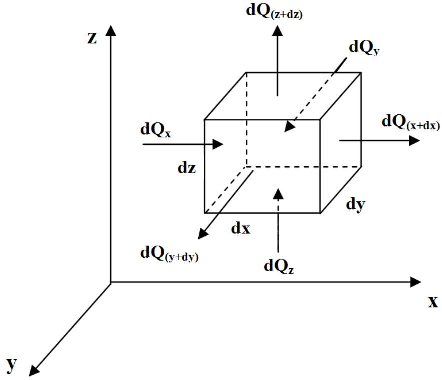

Рис. 3. К выводу дифференциального уравнения энергии

Слагаемые уравнения (7) можно выразить через проекции плотности тепловых потоков:

$$dQ_x = q_x dydzd\tau, dQ_{(x+dx)} = q_{(x+dx)} dydzd\tau,$$
$$dQ_y = q_y dxdzd\tau, dQ_{(y+dy)} = q_{(y+dy)} dxdzd\tau, \qquad (8)$$
$$dQ_z = q_z dxdyd\tau, dQ_{(z+dz)} = q_{(z+dz)} dxdyd\tau.$$

Плотности тепловых потоков ($q_{(x+dx)}, q_{(y+dy)}, q_{(z+dz)}$) являются физическими характеристиками, поэтому должны быть непрерывны в рассматриваемой области. Используя для них разложение в ряд Тейлора, и ограничиваясь первыми двумя членами ряда, получим:

$$q_{(x+dx)} = q_x + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x}\right) dx, \quad q_{(y+dy)} = q_y + \left(\frac{\partial q_y}{\partial y}\right) dy,$$
$$q_{(z+dz)} = q_z + \left(\frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dz. \qquad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (7), после преобразований получим:

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dxdydzd\tau . \qquad (10)$$

Определим накопление энергии в КО - dQ_2 за счёт внутренних источников тепловыделения. Мощность внутренних источников тепла характеризуется объемной плотностью теплового потока $q_v,[Вт/м^3]$.

Таким образом:

$$dQ_2 = q_v dxdydzd\tau \,. \tag{11}$$

Если процесс теплообмена происходит при постоянном давлении, накапливаемая теплота расходуется на увеличение энтальпии КО $\left(dQ_1 + dQ_2 = dI\right)$. Энтальпия обычно выражается как функция $I = f\left(p,t\right)$, тогда для КО:

$$dI = c_P \rho \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right) dxdydzd\tau \,, \tag{12}$$

где: $c_P,[Дж/\left(кг \cdot град\right)]$ - удельная массовая теплоемкость при постоянном давлении; $\rho,[кг/м^3]$ - плотность материала; $dxdydz = dV,[м^3]$ - объем КО.

Объединяя выражения(10) - (12) в уравнение баланса, получим дифференциальное уравнение энергии в следующем виде:

$$c_P \rho \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right) = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v \,. \tag{13}$$

Сумма производных от компонент вектора плотности теплового потока представляет собой дивергенцию этого вектора, тогда:

$$c_P \rho \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right) = -div\left(\vec{q}\right) + q_v \,. \tag{14}$$

Плотность теплового потока определяется для процесса теплопроводности законом Фурье, а проекции на оси координат уравнениями (6). Подставляя эти уравнения в (13) и считая теплопроводность материала постоянной, получим:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right) = -\frac{\lambda}{c_P \rho}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{c_P \rho} \tag{15}$$

Отношение $\left(\lambda/\left(c_P \cdot \rho\right)\right)$ составлено из физических характеристик вещества и представляет собой тоже физическую характеристику - **температуропроводность -** $a,[м^2/с]$:

$$a = \frac{\lambda}{c_P \rho}. \tag{16}$$

Коэффициент температуропроводности характеризует способность вещества проводить температуру и является мерой тепловой инерционности. С учетом этого уравнение энергии можно представить в виде:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right) = -a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{c_P \rho}, \tag{17}$$

Учитывая, что выражение в скобках представляет собой оператор Лапласа по температуре, уравнение (17) окончательно можно записать:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right) = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{c_P \rho}. \tag{18}$$

Условия однозначности для тепловых процессов

Дифференциальное уравнение энергии описывает процесс теплопроводности в самом общем виде, т.е. все бесчисленное множество процессов. Для каждого конкретного случая необходимо задать условия однозначности, выделяющие этот процесс из множества и позволяющие выполнить интегрирование уравнения энергии. В общем случае условия однозначности содержат:

1) **геометрические условия** - форма и размеры тела;

2) **физические условия** - физические свойства тела и окружающей среды;

3) **временные условия** - определяют начальное тепловое состояние системы и изменение граничных условий во времени (задаются только при нестационарном режиме теплопроводности);

4) **граничные условия** - определяют особенности взаимодействия рассматриваемого тела с окружающей средой.

Граничные условия для процессов теплопроводности задаются в трех вариантах.

1. **Граничные условия первого рода.** Задается распределение температур на границах тела в каждый момент времени. Необходимо определить распределение температур и тепловой поток.

2. **Граничные условия второго рода.** Задается значение теплового потока на границах тела в каждый момент времени и одна температура. Необходимо определить вторую температуру и распределение температур в теле.

3. **Граничные условия третьего рода.** Задается температура окружающей среды и закон теплообмена между телом и окружающей средой. Необходимо определить распределение температур в системе и тепловой поток.

Дифференциальное уравнение энергии и условия однозначности являются полной математической формулировкой (математической моделью) конкретной задачи теплопроводности.

Контрольные вопросы

1. Основные допущения при выводе уравнения энергии для теплопроводности.

2. Записать общий вид уравнения энергии для теплопроводности.

3. Объяснить физический смысл уравнения энергии для теплопроводности.

4. Коэффициент температуропроводности, его размерность.

5. Состав условий однозначности в общем виде.

6. Граничные условия.

3. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ

3.1. Граничное условие первого рода

Передача тепла через плоскую твёрдую однородную стенку в стационарных условиях является частным случаем общей задачи теплообмена, позволяющий существенно упростить дифференциальное уравнение энергии и получить его точное решение. Вместе с тем такие процессы очень часто встречаются в технике. Расчетная схема процесса приведена на рис. 4.

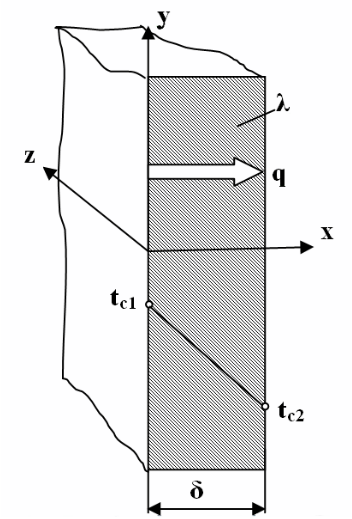

Рис. 4. Расчетная схема теплопроводности плоской стенки при граничных условиях первого рода.

Расположим начало системы координат на левой поверхности стенки, тогда ось (x) будет направлена по нормали к поверхности.

Термин «плоская стенка» предопределяет следующие допущения:

- размеры стенки в направлении осей (y, z) бесконечно велики, поэтому стоками тепла в этих направлениях можно пренебречь;
- перенос теплоты теплопроводностью будет происходить только по оси (x), т.е. от левой поверхности к правой.

В соответствии с этими допущениями в уравнении энергии (17) производные от температуры по координатам (y) и (z) будут равны 0. Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности, тогда производная по времени также будет равна 0. Будем считать, что в стенке отсутствуют внутренние источники тепла, т.е. $q_v = 0$. Таким образом уравнение энергии можно записать в виде:

$$a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right) = 0 \,. \tag{19}$$

Так как коэффициент температуропроводности a является физической характеристикой и не может быть равен нулю:

$$\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right) = 0 \,, \tag{20}$$

или, учитывая, что температура изменяется только в одном направлении, можно от частной производной перейти к полной:

$$\left(\frac{d^2 t}{dx^2}\right) = 0 \,. \tag{21}$$

Условия однозначности:

- геометрические условия - толщина стенки равна δ;
- физические условия - коэффициент теплопроводности λ;
- граничные условия - температуры поверхностей стенки поддерживаются постоянными t_{c1} и t_{c2} (для определенности примем $t_{c1} > t_{c2}$).

Определить закон изменения температуры в стенке $t = f(x)$ и плотность теплового потока q, проходящего через стенку.

После первого интегрирования уравнения (21) получаем:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right) = C_1 \,. \tag{22}$$

После второго интегрирования уравнения (21) получаем:

$$t = C_1 x + C_2 \,, \tag{23}$$

где C_1, C_2 - константы интегрирования.

Константы интегрирования определим из граничных условий:

при $x = 0$ $t = t_{c1}$, $x = \delta$ $t = t_{c2}$, тогда из (23) следует, что $C_2 = t_{c1}$, а $C_1 = \left(t_{c2} - t_{c1}\right)/\delta$.

Подставляя эти значения в (23) получим уравнение температурного поля в стенке

$$t = \left(\frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta} \right) x + t_{c1}. \tag{24}$$

Из этого уравнения следует, что **температура в плоской стенке изменяется по линейному закону** от t_{c1} до t_{c2} .

Уравнение (22) представляет собой температурный градиент в плоской стенке, подставляя его в закон Фурье (6), получим расчетную зависимость для плотности теплового потока:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} \left(t_{c1} - t_{c2} \right). \tag{25}$$

Соотношение λ/δ называется **тепловой проводимостью** плоской стенки, а обратная величина δ/λ - **внутренним термическим сопротивлением**. Уравнение (25) выражает общую для всех процессов теплопереноса закономерность - плотность теплового потока пропорциональна действующей разности температур (температурному напору). Коэффициентом пропорциональности является тепловая проводимость стенки (для сложных систем - тепловая проводимость всей системы).

В плоской стенке конечных размеров тепловой поток определится следующим образом:

$$Q = qF = \frac{\lambda}{\delta} \left(t_{c1} - t_{c2} \right) F , \tag{26}$$

где $F, [м^2]$ - площадь поверхности стенки.

Зависимости (25) и (26) могут использоваться для всего класса задач теплопроводности плоской стенки, при граничных условиях первого рода.

Рассмотрим теперь теплопроводность плоской многослойной стенки, состоящей из n слоев. На границе раздела двух слоев возникает **контактное термическое сопротивление**, обусловленное неплотным соприкосновением поверхностей. Размер контактного слоя очень мал по сравнению с размерами стенок, поэтому его считают точечным термическим сопротивлением $R_K, [м^2 \cdot град/Вт]$.

Расчетная схема многослойной стенки показана на рис. 5. Условия однозначности:

- геометрические условия - толщина стенок $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots \delta_n$;
- физические условия:

а) коэффициенты теплопроводности стенок $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n$,

б) контактные термические сопротивления $R_{K1}, R_{K2} \ldots R_{K(n-1)}$;

- граничные условия первого рода - температуры на границах $t_{c1}, \mathrm{t}_{\mathrm{c}(n+1)}$.

Определить температурное поле в сложной (многослойной) стеке и плотность теплового потока.

Рассмотрим процесс стационарной теплопроводности. В этом случае плотность теплового потока через каждую стенку и контактное термическое сопротивление должен быть одинаковым и равным q. Распределение температуры в каждой стенке должно подчиняться линейному закону, поэтому общий вид температурного поля должен иметь вид, показанный на рис. 5. Из уравнения (25) следует, что разность температур на каждой стенке определяется величиной тепловой проводимости (δ / λ). Поэтому, чем больше эта величина (следовательно, меньше термическое сопротивление), тем меньше требуется разность температур.

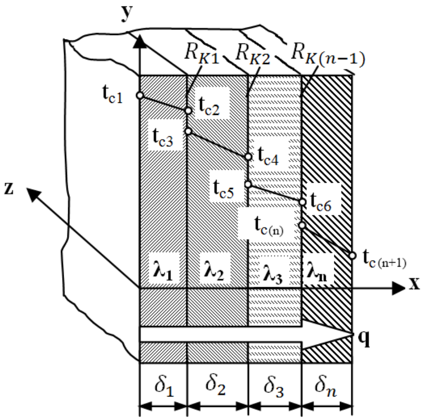

Рис. 5. Расчетная схема теплопроводности многослойной плоской стенки при граничных условиях первого рода.

Для преодоления контактных термических сопротивлений также необходима разность температур. Т.к. контактный слой имеет точечный размер, то эта разность температур будет представлять собой скачок температуры. Скачок температуры реализуется вследствие разных температур контактирующих поверхностей стенок. Чем больше величина контактного термического сопротивления, тем больше величина скачка температуры.

Запишем уравнения для плотности тепловых потоков через стенки и контактные термические сопротивления:

$$\begin{cases} q = \dfrac{\lambda_1}{\delta_1}(t_{c1} - t_{c2}), \\ q = \dfrac{1}{R_{K1}}(t_{c2} - t_{c3}), \\ q = \dfrac{\lambda_2}{\delta_2}(t_{c3} - t_{c4}), \\ q = \dfrac{1}{R_{K2}}(t_{c4} - t_{c5}), \\ q = \dfrac{\lambda_3}{\delta_3}(t_{c5} - t_{c6}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q = \dfrac{1}{R_{K(n-1)}}(t_{c6} - t_{c(n)}), \\ q = \dfrac{\lambda_n}{\delta_n}(t_{c(n)} - t_{c(n+1)}). \end{cases} \tag{27}$$

Выразим из уравнений (27) разности температур

$$\begin{cases} (t_{c1} - t_{c2}) = q\dfrac{\delta_1}{\lambda_1}, \\ (t_{c2} - t_{c3}) = qR_{K1}, \\ (t_{c3} - t_{c4}) = q\dfrac{\delta_2}{\lambda_2}, \\ (t_{c4} - t_{c5}) = qR_{K2}, \\ (t_{c5} - t_{c6}) = q\dfrac{\delta_3}{\lambda_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (t_{c6} - t_{c(n)}) = qR_{K(n-1)}, \\ (t_{c(n)} - t_{c(n+1)}) = q\dfrac{\delta_n}{\lambda_n}. \end{cases} \tag{28}$$

После суммирования левых и правых частей уравнений (28) получим:

$$t_{c1} - t_{cn} = q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + R_{K1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + R_{K2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} + \ldots + R_{K(n-1)} + \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right) \tag{29}$$

или $t_{c1} - t_{c(n+1)} = qR$, где $R = \left(\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + R_{K1} + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2} + R_{K2} + \dfrac{\delta_3}{\lambda_3} + \ldots + R_{K(n-1)} + \dfrac{\delta_n}{\lambda_n}\right)$ - сумма термических сопротивлений всей системы (общее термическое сопротивление всей цепочки переноса теплоты). Отсюда:

$$q = \frac{1}{R}(t_{c1} - t_{c(n+1)}). \tag{30}$$

Величина обратная общему термическому сопротивлению $1/R$ характеризует способность проводить теплоту (тепловую проводимость системы). На основании выражения для общего термического сопротивления можно сформулировать закон аддитивности термических сопротивлений. В любой сложной системе теплопереноса общее термическое сопротивление равно сумме частных термических сопротивлений.

В общем случае уравнение (30) можно записать в виде:

$$q = \frac{(t_{c1} - t_{c(n+1)})}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n-1} R_{Ki} \right)} \ , \tag{31}$$

где: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$ - алгебраическая сумма термических сопротивлений стенок, $\sum_{i=1}^{n-1} R_{Ki}$ - алгебраическая сумма термических сопротивлений контактов.

Если термическими сопротивлениями контактов можно пренебречь, уравнение (31) упрощается

$$q = \frac{(t_{c1} - t_{c(n+1)})}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \ . \tag{32}$$

Уравнения (31) и (32) содержат только величины, входящие в условия однозначности, что позволяет рассчитать плотность теплового потока. Для определения промежуточных температур воспользуемся системой уравнений (28):

$$\begin{aligned}
t_{c2} &= t_{c1} - q\frac{\delta_1}{\lambda_1}, \\
t_{c3} &= t_{c2} - qR_{K1}, \\
t_{c4} &= t_{c3} - \mathrm{q}\frac{\delta_2}{\lambda_2}, \\
t_{c4} &= t_{c3} - \mathrm{q}\frac{\delta_2}{\lambda_2}, \\
t_{c5} &= t_{c4} - qR_{K2}, \\
t_{c6} &= t_{c5} - q\frac{\delta_3}{\lambda_3}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
t_{c(n)} &= t_{c6} - qR_{K(n-1)}
\end{aligned} \tag{33}$$

3.2. Граничное условие второго рода

В ряде практических задач бывает задана плотность теплового потока и одна из температур. Такой класс задач относится к граничным условиям второго рода. Решение задачи сводится к определению поля температур и температуры на другой границе тела.

Совершенно очевидно, что в плоской стенке без внутренних источников теплоты будет линейный закон изменения температуры. Неизвестная температура определяется для одной стенки из уравнения (25), а для сложной стенки по уравнениям (33).

3.3. Граничное условие третьего рода

Граничное условие третьего рода описывают широкий класс практических задач, в которых теплота передается от одной движущейся среды к другой через разделяющую их плоскую стенку. Среда с более высокой температурой называется «горячий теплоноситель», а с более низкой температурой - «холодный теплоноситель». Процесс переноса теплоты в этих условиях называется **теплопередача**. Расчетная схема показана на рис. 6.

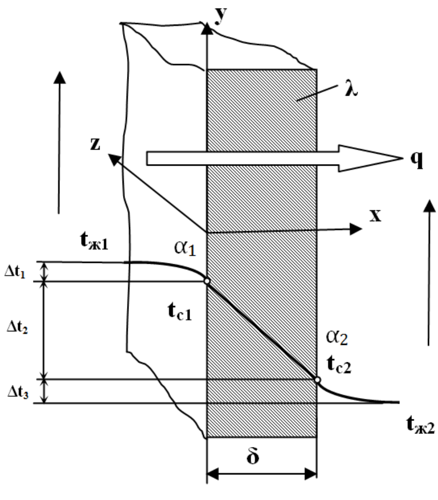

Рис. 6. Расчетная схема теплопроводности плоской стенки при граничных условиях третьего рода.

Примем для определенности, что температура среды 1 больше, чем среды 2, $(t_{ж1} > t_{ж2})$. Тогда тепловой поток будет направлен от теплоносителя 1 к теплоносителю 2, как показано на рис. 6.

Процесс теплопередачи это сложный процесс, в котором участвуют различные механизмы переноса теплоты. От теплоносителя 1 к поверхности стенки теплота переносится в процессе конвективного теплообмена. Процесс конвективного теплообмена между движущейся средой и твердой поверхностью называется **теплоотдачей**. Процесс теплоотдачи описывается **законом Ньютона-Рихмана**:

$$q = \alpha(t_{ж} - t_{c}) \tag{34}$$

где: $t_{ж}, t_{c}$ - температуры среды и стенки (при $t_{ж} > t_{c}$); $\alpha, \left[Вт/\left(м^{2} \cdot град\right)\right]$ - коэффициент теплоотдачи.

Коэффициент теплоотдачи характеризует совокупность условий теплоотдачи, чем больше его численное значение, тем интенсивнее процесс. Величина обратная коэффициенту теплоотдачи $(1/\alpha)$ - является термическим сопротивлением процесса теплоотдачи.

В процессе теплопередачи можно выделить 3 характерных участка:

- первый участок - процесс теплоотдачи от теплоносителя 1 к стенке;
- второй участок - процесс теплопроводности в плоской стенке;
- третий участок - процесс теплоотдачи от стенки к теплоносителю 2.

Каждому участку соответствует местный температурный напор Δt, необходимый для переноса теплоты. Сумма местных температурных напоров формирует общую разность температур процессу теплопередачи:

$$\Delta t_{1} + \Delta t_{2} + \Delta t_{3} = (t_{ж1} - t_{ж2}) \tag{35}$$

Рассмотрим процесс стационарной теплопередачи.

Условия однозначности:

- геометрические условия - толщина стеки равна δ;
- физические условия - коэффициент теплопроводности стенки λ;
- граничные условия - задан закон теплообмена на границах стенки в виде коэффициентов теплоотдачи α_{1}, α_{2} и температуры сред $t_{ж1}$, $t_{ж2}$.

Определить плотность теплового потока q и поле температур.

В стационарных условиях на каждом участке теплопередачи должна быть одинаковая плотность теплового потока q:

$$\begin{cases} q = \alpha_1 \Delta t_1 = \alpha_1 (t_{ж1} - t_{c1}), \\ q = \dfrac{\lambda}{\delta} \Delta t_2 = \dfrac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}), \\ q = \alpha_2 \Delta t_3 = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}). \end{cases} \qquad (36)$$

Выразим в (36) разности температур, сложим левые и правые части и после сокращения промежуточных температур получим:

$$(t_{ж1} - t_{ж2}) = q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right), \qquad (37)$$

отсюда

$$q = \frac{(t_{ж1} - t_{ж2})}{\left(\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\alpha_2}\right)} = k(t_{ж1} - t_{ж2}) \qquad (38)$$

где: $k, \left[Вт / \left(м^2 \cdot град \right) \right]$ - **коэффициент теплопередачи**.

Коэффициент теплопередачи характеризует способность всей системы проводить теплоту. Численно он равен количеству теплоты, передаваемому через единицу площади изотермической поверхности в единицу времени при разности температур в 1 градус. Величина обратная k (выражение в круглых скобках) - общее термических сопротивлений всех участков теплопереноса. Очевидно, что чем меньше общее термическое сопротивление, тем больше численное значение коэффициента теплопередачи и больше интенсивность переноса теплоты.

Уравнение (38) содержит величины заданные в условиях однозначности, что позволяет рассчитать плотность теплового потока. Тогда промежуточные температуры t_{c1}, t_{c2} определяются из первого и третьего уравнения системы (36).

Рассмотрим случай многослойной плоской стенки при наличии контактных термических сопротивлений. Расчетная схема приведена на рис. 7.

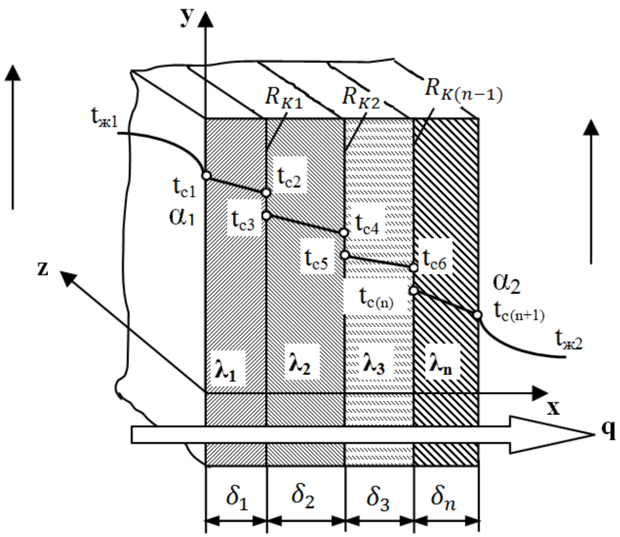

Рис. 7. Расчетная схема теплопроводности многослойной плоской стенки при граничных условиях третьего рода.

В граничных условиях третьего рода задан закон теплообмена на границах стенки в виде коэффициентов теплоотдачи α_1, α_2 и температуры сред $t_{ж1}, t_{ж2}$ $\left(t_{ж1} > t_{ж2}\right)$. Остальные условия однозначности полностью аналогичны граничным условиям первого рода для многослойной плоской стенки.

Определить плотность теплового потока и поле температур.

На основании закона аддитивности общее термическое сопротивление переносу тепла от теплоносителя 1 к теплоносителю 2:

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n-1} R_{Ki} + \frac{1}{\alpha_2}, \qquad (39)$$

где: $1/\alpha_1$ - термическое сопротивление теплоотдаче от теплоносителя 1 к стенке; $\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$ - сумма термических сопротивлений n стенок; $\sum_{i=1}^{n-1} R_{Ki}$ - сумма термических сопротивлений $(n-1)$ контактов; $1/\alpha_2$ - термическое сопротивление теплоотдаче от стенки к теплоносителю 2.

Величина обратная общему термическому сопротивлению - коэффициент теплопередачи:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} R_{Ki} + \frac{1}{\alpha_2}}, \tag{40}$$

тогда на основании уравнения (38) плотность теплового потока:

$$q = k(t_{ж1} - t_{ж2}) = \frac{(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} R_{Ki} + \frac{1}{\alpha_2}}. \tag{41}$$

Промежуточные температуры t_{c1}, t_{cn} определяются из уравнений аналогичных первому и третьему уравнению системы (36). Промежуточные температуры на границах стенок определяются по уравнениям (33).

Контрольные вопросы

1. Основные допущения определения «плоская стенка».

2. Общая формулировка задачи теплопроводности плоской стенки при граничных условиях первого рода (что задано, что нужно определить).

3. Записать уравнения для плотности теплового потока плоской стенки при граничных условиях первого рода (одиночной и сложной).

4. Записать выражения, характеризующие теплопроводящие свойства и термическое сопротивление плоской стенки.

5. Общая формулировка задачи теплопроводности плоской стенки при граничных условиях третьего рода (что задано, что нужно определить).

6. Физический смысл граничных условий третьего рода.

7. Закон конвективного теплообмена.

8. Закон аддитивности термических сопротивлений.

9. Записать уравнения для плотности теплового потока плоской стенки при граничных условиях третьего рода (одиночной и сложной).

10. Коэффициент теплопередачи, его размерность.

4. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТЕНКИ

4.1. Граничные условия первого рода

В различных технических устройствах широкое применение находят трубчатые конструкции, это трубчатые теплообменники, трубопроводы для перемещения теплоносителей, трубчатые нагреватели и т.д. Рассмотрим теплопроводность цилиндрической стенки, предполагая, что длина ее достаточно велика и стоком теплоты с торцов можно пренебречь. Тогда изотермические поверхности будут иметь вид цилиндрических поверхностей и перенос теплоты будет происходить только в радиальном направлении. Расчетная схема теплопроводности цилиндрической стенки показана на рис. 8. **Изменение температуры в стенке трубы имеет логарифмический вид в отличие от плоской поверхности, где ее профиль линейный.**

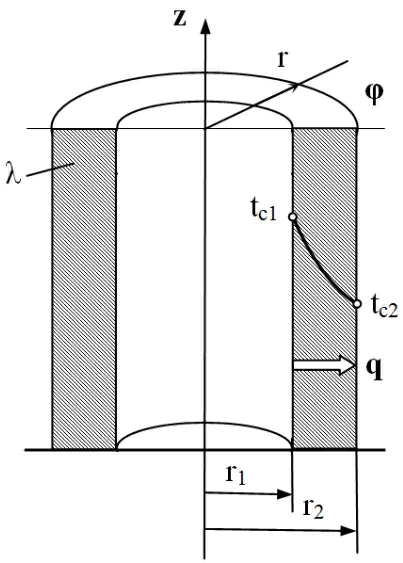

Рис. 8. Расчетная схема теплопроводности цилиндрической стенки при граничных условиях 1 рода

Для цилиндрической стенки удобнее использовать цилиндрическую систему координат, в которой координатами являются расстояние по оси (z), текущий радиус-вектор (r) и угол поворота радиус-вектора (φ). Рассмотрим стационарный процесс теплообмена при отсутствии внутренних источников тепла, тогда уравнение энергии (18) принимает вид:

$$\nabla^2 t = 0 . \qquad (42)$$

В цилиндрической системе координат оператор Лапласа можно расписать следующим образом:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 . \qquad (43)$$

Для рассматриваемых условий изменение температуры происходит только в направлении координаты (r), поэтому $\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0$, $\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$. Тогда, переходя от частной производной к полной, получим:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r}\left(\frac{dt}{dr}\right) = 0 . \qquad (44)$$

Условия однозначности:

● геометрические условия - заданы радиусы r_1 и r_2;

● физические условия - коэффициент теплопроводности стенки λ;

● граничные условия первого рода - заданы температуры на границах t_{c1}, t_{c2} (примем $t_{c1} > t_{c2}$).

Определить закон изменения температуры в стенке и плотность теплового потока q.

Введем новую переменную $u = \frac{dt}{dr}$, тогда $\frac{d^2 t}{dr^2} = \frac{du}{dr}$, $\frac{1}{r}\left(\frac{dt}{dr}\right) = \frac{u}{r}$ и уравнение (44) принимает вид:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0 . \qquad (45)$$

После разделения переменных и интегрирования получим:

$$\ln u + \ln r = lnC_1 , \qquad (46)$$

где C_1 - первая константа интегрирования. После потенцирования (46) и переходу к исходной переменной получим:

$$dt = C_1 \frac{dr}{r}, \quad \text{или} \quad \frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r} . \qquad (47)$$

Интегрируя (47), получим:

$$t = C_1 \ln r + C_2 . \tag{48}$$

Из этого решения следует, что в цилиндрической стенке температура изменяется по логарифмическому закону от радиуса (рис. 8). Для нахождения констант интегрирования воспользуемся граничными условиями:

при $r = r_1$ $t = t_{c1}$, при $r = r_2$ $t = t_{c2}$, тогда:

$$\begin{cases} t_{c1} = C_1 \ln r_1 + C_2, \\ t_{c2} = C_1 \ln r_2 + C_2. \end{cases} \tag{49}$$

Решение, системы уравнений (49), выполним следующим образом: вычтем из первого уравнения второе; получим: $t_{c1} - t_{c2} = C_1(\ln r_1 - \ln r_2) = C_1 \ln\left(r_1/r_2\right)$, отсюда:

$$C_1 = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln\left(r_1/r_2\right)}\ ; \tag{50}$$

подставим (50) в первое уравнение системы (49); получим: $t_{c1} = \left(\dfrac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln\left(r_1/r_2\right)}\right) \ln r_1 + C_2$,

отсюда:

$$C_2 = t_{c1} - \left(\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln\left(r_1/r_2\right)}\right) \ln r_1\ ; \tag{51}$$

подставим (50) и (51) в уравнение температурного поля (48) и окончательно получим: $t = t_{c1} + \left(\dfrac{\ln r}{\ln\left(r_1/r_2\right)} - \dfrac{\ln r_1}{\ln\left(r_1/r_2\right)}\right)\left(t_{c1} - t_{c2}\right)$,

или:

$$t = t_{c1} - \left(t_{c1} - t_{c2}\right)\left(\frac{\ln\left(r/r_1\right)}{\ln\left(r_2/r_1\right)}\right), \tag{52}$$

где: t - текущая температура в стенке, r - текущий радиус.

Уравнение (52) можно выразить через диаметры цилиндрической стенки:

$$t = t_{c1} - \left(t_{c1} - t_{c2}\right)\left(\frac{\ln\left(d/d_1\right)}{\ln\left(d_2/d_1\right)}\right). \tag{53}$$

Для определения плотности теплового потока воспользуемся законом Фурье (5) в конечных приращениях:

$$Q = -\lambda\left(\frac{dt}{dr}\right)F, \;\; [Вт] \tag{54}$$

где: $F = 2\pi rl$ - площадь цилиндрической поверхности на текущем радиусе r (площадь текущей изотермической поверхности); l, $[м]$ - длина цилиндрической стенки по оси (z).

Подставим в (54) выражение для градиента температуры (47) и константы C_1, получим:

$$Q = 2\pi l\lambda\left(\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln\left(r_2/r_1\right)}\right) \tag{55}$$

Уравнение (55) выражает полный тепловой поток, проходящий через стенку длиной l. Ввиду геометрических особенностей в цилиндрической стенке площадь изотермической поверхности зависит от радиуса и изменяется от минимального (на внутренней поверхности), до максимального (на внешней) значения. Вследствие этого плотность теплового потока будет также изменяться по толщине стенки.

Для цилиндрической стенки целесообразно использовать другую удельную характеристику - **линейную плотность теплового потока**, q_l, $[Вт/м]$. Линейной плотностью теплового потока называют количество теплоты, проходящей через стенку на единице погонной длины цилиндрической поверхности в единицу времени. В соответствии с определением:

$$q_l = \frac{Q}{l} = 2\pi\lambda\left(\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln\left(r_2/r_1\right)}\right) = \frac{\pi\left(t_{c1} - t_{c2}\right)}{\frac{1}{2\lambda}\ln\left(r_2/r_1\right)}. \tag{56}$$

В этом уравнении выражение $\left(\dfrac{1}{2\lambda}\ln\dfrac{r_2}{r_1}\right)$ характеризует линейное термическое сопротивление процессу теплопроводности, а величина обратная ему $\left(1\Big/\left(\dfrac{1}{2\lambda}\ln\dfrac{r_2}{r_1}\right)\right)$ - тепловую проводимость стенки.

В случае многослойной цилиндрической стенки состоящей из n слоев при наличии контактных термических сопротивлений между слоями (схема не приводится) на основании закона аддитивности термических сопротивлений общее линейное термическое сопротивление

$$R_l = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2\lambda_i}\ln\frac{r_{(i+1)}}{r_i}\right) + \sum_{i=1}^{n-1}R_{Kli}\,, \tag{57}$$

где $R_{Kli}, \left[м \cdot град / Вт\right]$ - линейное контактное термическое сопротивление.

Величина обратная общему линейному термическому сопротивлению характеризует тепловую проводимость сложной стенки, тогда на основании (56) линейная плотность теплового потока:

$$q_l = \frac{\pi\left(t_{c1} - t_{cn}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2\lambda_i}\ln\frac{r_{(i+1)}}{r_i}\right) + \sum_{i=1}^{n-1}R_{Kli}}\,. \tag{58}$$

При известном значении q_l промежуточные температуры в стенке определяются на основании соотношений аналогичных (56), а скачок температуры на границах стенок из уравнения:

$$q_l = \frac{\pi}{R_{Kli}}\left(t_{ci} - t_{c(i-1)}\right). \tag{59}$$

Граничные условия второго рода являются обратными по отношению к условиям первого рода. В них задается одна из температур стенки и линейная плотность теплового потока. Для расчета второй температуры и промежуточных температур используются расчетные зависимости, полученные для граничных условий первого рода.

4.2. Граничные условия третьего рода

Граничные условия третьего рода характеризуют процесс теплопередачи через цилиндрическую стенку от одного теплоносителя к другому. Расчетная схема приведена на рис. 9. Примем для определенности, что температура среды 1 больше, чем среды 2, $\left(t_{ж1} > t_{ж2}\right)$. Тогда тепловой поток будет направлен от теплоносителя 1 к теплоносителю 2.

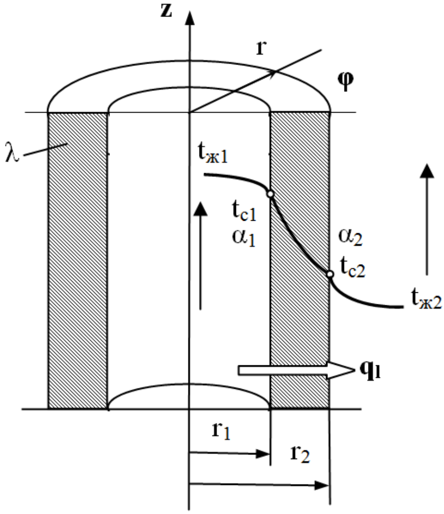

Рис. 9. Расчетная схема теплопроводности цилиндрической стенки при граничных условиях третьего рода

Условия однозначности:

- геометрические условия - радиусы r_1, r_2;
- физические условия - коэффициент теплопроводности стенки λ;
- граничные условия - задан закон теплообмена на границах стенки в виде коэффициентов теплоотдачи α_1, α_2 и температуры сред $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$.

Определить плотность теплового потока q_l и поле температур.

В стационарных условиях на каждом участке теплопередачи должна быть одинаковая линейная плотность теплового потока q_l.

$$\begin{cases} q_l = \alpha_1(2\pi \mathrm{r}_1)(t_{ж1} - t_{c1}), \\ q_l = 2\pi\lambda\left(\dfrac{t_{c1} - t_{c2}}{\ln\left(r_2/r_1\right)}\right), \\ q_l = \alpha_2(2\pi \mathrm{r}_2)(t_{c2} - t_{ж2}). \end{cases} \tag{60}$$

Выразим в этих уравнениях разности температур:

$$\begin{cases} \left(t_{ж1} - t_{c1}\right) = \dfrac{q_l}{\alpha_1(2\pi \mathrm{r}_1)}, \\ \left(t_{c1} - t_{c2}\right) = \dfrac{q_l}{2\pi\lambda}\ln\dfrac{r_2}{r_1}, \\ \left(t_{c2} - t_{ж2}\right) = \dfrac{q_l}{\alpha_2(2\pi \mathrm{r}_2)}. \end{cases} \tag{61}$$

Просуммируем левые и правые части уравнений и заменим радиусы на диаметры:

$$\left(t_{ж1} - t_{ж2}\right) = \frac{q_l}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}\right). \tag{62}$$

Отсюда

$$q_l = \frac{\pi\left(t_{ж1} - t_{ж2}\right)}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \dfrac{1}{2\lambda}\ln\dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{1}{\alpha_2 d_2}}. \tag{63}$$

Уравнение (63) содержит только исходные данные условий однозначности, что позволяет рассчитать линейную плотность теплового потока.

Знаменатель уравнения (63) представляет собой сумму термических сопротивлений трех участков теплопередачи, т.е. общее термическое сопротивление. Величина обратная ему характеризует теплопроводящие свойства системы и называется - **линейный коэффициент теплопередачи -** $k_l, [Вт/(м \cdot град)]$.

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \quad (64)$$

Численно линейный коэффициент теплопередачи равен количеству теплоты, передаваемой от теплоносителя 1 к теплоносителю 2 через цилиндрическую стенку длиной 1 метр при разности температур теплоносителей 1 градус.

Используя определение линейного коэффициента теплоотдачи уравнение (63) можно представить в виде:

$q_l = k_l \pi (t_{ж1} - t_{ж2})$. (65)Промежуточные температуры t_{c1}, t_{c2} находятся из уравнений (61).

Рассмотрим многослойную цилиндрическую стенку при наличии контактных термических сопротивлений в граничных условиях третьего рода. Расчетная схема показана на рис. 10.

Условия однозначности:

● геометрические условия - радиусы слоёв $r_{1,} r_{2,} r_3 \dots r_{n+1}$;

● физические условия – заданы коэффициенты теплопроводности стенок $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{3\dots} \lambda_n$ и линейные контактные термические сопротивления $R_{Kl1} R_{Kl2}, R_{Kl3} \dots R_{Kln}$;

● граничные условия - задан закон теплообмена на границах стенки в виде коэффициентов теплоотдачи α_1, α_2 и температуры сред $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$.

Определить линейную плотность теплового потока q_l и поле температур в сложной стенке.

На основании закона аддитивности термических сопротивлений общее линейное термическое сопротивление:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln\frac{d_{(i+1)}}{d_i} + \sum_{i=1}^{n-1} R_{Kli} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}, \quad (66)$$

тогда на основании (65)

$$q_l = \frac{1}{R_l}\pi\left(t_{ж1} - t_{ж2}\right) = \frac{\pi\left(t_{ж1} - t_{ж2}\right)}{\dfrac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2\lambda_i}\ln\dfrac{d_{(i+1)}}{d_i} + \sum\limits_{i=1}^{n-1}R_{Kli} + \dfrac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}. \qquad (67)$$

Общий вид поля температур показан на рис. 10. Промежуточные температуры определяются по (59) и формулам аналогичным (61).

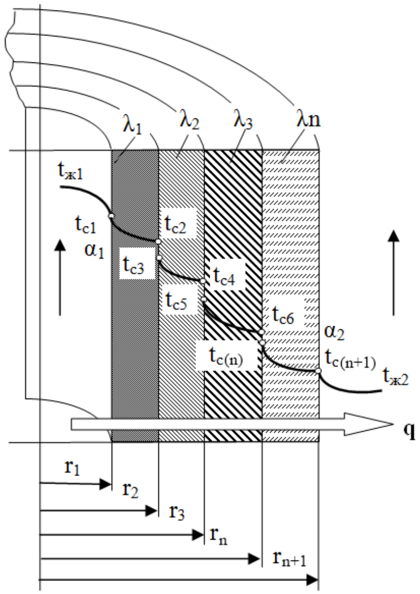

Рис. 10. Расчетная схема теплопроводности многослойной цилиндрической стенки при граничных условиях третьего рода

4.3. Критический диаметр тепловой изоляции

Основной объем теплотехнических расчетов сводится к решению типовых задач в соответствии с граничными условиями. Однако кроме них существует две группы дополнительных задач - это задачи интенсификации теплообмена и задачи тепловой защиты.

Задачи тепловой защиты решают способы уменьшения тепловых потоков от теплоносителей в окружающую среду. В случае плоской стенки задачи решаются однозначно - наложением слоя теплоизоляционного материала. При этом увеличивается общее термическое сопротивление и уменьшается тепловой поток. В случае цилиндрической стенки такой однозначности нет, поэтому требуется проведение дополнительного анализа.

Рассмотрим типовую конструкцию - трубопровод с наложенным на него слоем теплоизоляции (рис. 11).

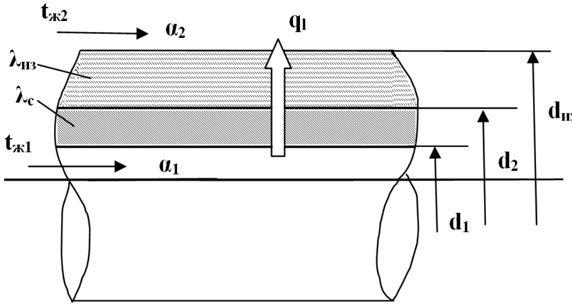

Рис. 11. Расчетная схема трубопровода с наложенной теплоизоляцией

Имеется металлическая труба большого удлинения (внутренний диаметр d_1, внешний диаметр d_2, теплопроводность металла λ_c) со слоем теплоизоляции (внешний диаметр $d_{из}$, теплопроводность изоляции $\lambda_{из}$). Коэффициенты теплоотдачи со стороны нагретой жидкости в трубе $(t_{ж1})$ и со стороны окружающей среды снаружи $(t_{ж2})$ заданы и равны α_1 и α_2. Теплоизоляция идеально наложена на трубу - контактное сопротивление отсутствует.

На основании (66) общее линейное термическое сопротивление в рассматриваемом случае будет:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_c}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}}\ln\frac{d_{из}}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_{из}} \qquad (68)$$

Влияние толщины слоя теплоизоляции (т.е. диаметра $d_{из}$) имеется только в двух последних слагаемых этого уравнения. Слагаемое $\left(\frac{1}{2\lambda_{из}}\ln\frac{d_{из}}{d_2}\right)$ учитывает термическое сопротивление слоя теплоизоляции, и с увеличением $d_{из}$ увеличивается. Слагаемое $\left(\frac{1}{\alpha_2 d_{из}}\right)$ учитывает термическое сопротивление процессу теплоотдачи к окружающей среде, и с увеличением $d_{из}$ уменьшается. Объясняется это тем, что с увеличением $d_{из}$ увеличивается поверхность контакта с окружающей средой.

Таким образом, увеличение толщины слоя теплоизоляции приводит к двум разнонаправленным эффектам. Следовательно, функция $R_l = f(d_{из})$ должна иметь экстремум. Для нахождения экстремума продифференцируем (68) по $d_{из}$ и приравняем производную нулю.

$$\frac{d(R_l)}{d(d_{из})} = \frac{1}{2\lambda_{из} d_{из}} - \frac{1}{\alpha_2 d_{из}^2} = 0 . \qquad (69)$$

Действительный корень этого уравнения соответствует точке экстремума и называется **критический диаметр тепловой изоляции**.

$$d_{кр} = \frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2} . \qquad (70)$$

Критический диаметр тепловой изоляции зависит от интенсивности процесса теплоотдачи (α_2) и коэффициента теплопроводности изоляции $(\lambda_{из})$.

Общий характер зависимости общего линейного термического сопротивления диаметр тепловой изоляции показан на рис. 12.

Линейная плотность теплового потока обратно пропорциональна общему линейному термическому сопротивлению, общий вид ее зависимости от $d_{из}$ показан на рис. 13. В точке экстремума (при $d_{из} = d_{кр}$) плотность теплового потока достигает максимума.

В расчетной практике обычно задан диаметр трубопровода d_2 и коэффициент теплоотдачи α_2. Целью расчета является выбор материала теплоизоляции $(\lambda_{из})$ и ее толщины.

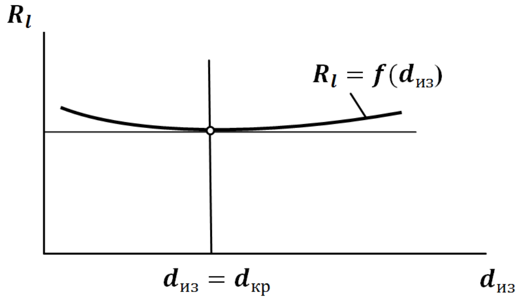

Рис. 12. Зависимость общего линейного термического сопротивления от диаметра тепловой изоляции

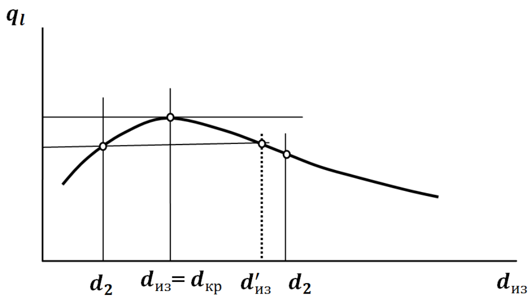

Рис. 13. Зависимость линейной плотности теплового потока от диаметра тепловой изоляции

Рассмотрим два типовых расчетных случая. Выбрана теплоизоляция с коэффициентом теплопроводности $\lambda_{из}$, при котором выполняется условие $d_2 > d_{кр}$ ($d_{кр}$ определяется по (70)). В этом случае, как видно на рис. 12 и 13, наложение на трубопровод теплоизоляции любой толщины приводит к увеличению термического сопротивления и уменьшению плотности теплового потока.

Во втором случае выбрана теплоизоляция, при которой $d_2 < d_{кр}$. В этом случае, как видно на рис. 12, 13, наложение на трубопровод теплоизоляции сначала приводит к уменьшению термического сопротивления (и, соответственно, к увеличению плотности теплового потока), до толщины слоя соответствующего $d_{кр}$. И только при дальнейшем увеличении толщины теплоизоляции начнется уменьшение плотности теплового потока.

Причем, при достижении толщины слоя теплоизоляции соответствующей диаметру $d'_{кр}$ плотность теплового потока будет такой же, как на трубопроводе без изоляции диаметром d_2. Полезный эффект появляется только при дальнейшем увеличении толщины теплоизоляции. Очевидно, что в этом случае тепловая изоляция не выполняет свою роль, необходимо выбрать другой тип с $\lambda_{из}$, обеспечивающей условие $d_2 > d_{кр}$.

Контрольные вопросы

1. Основные допущения определения «цилиндрическая стенка».

2. Общая формулировка задачи теплопроводности цилиндрической стенки при граничных условиях первого рода (что задано, что нужно определить).

3. Записать уравнения для линейной плотности теплового потока цилиндрической стенки при граничных условиях первого рода (одиночной и сложной).

4. Общая формулировка задачи теплопроводности цилиндрической стенки при граничных условиях третьего рода (что задано, что нужно определить).

5. Записать уравнения для линей ной плотности теплового потока цилиндрической стенки при граничных условиях третьего рода (одиночной и сложной).

6. Линейный коэффициент теплопередачи, его размерность.

7. Расчетная схема тепловой изоляции цилиндрической стенки.

8. Физические условия возникновения критического диаметра тепловой изоляции.

9. Записать выражение для определения критического диаметра тепловой изоляции и объяснить его использование для правильного выбора тепловой изоляции.

5. ТЕПЛОПЕРЕДАЧА ЧЕРЕЗ РЕБРИСТУЮ СТЕНКУ

Наличие рёбер на стенке позволяет увеличить поверхность ее соприкосновения с теплоносителем и тем самым уменьшить внешнее термическое сопротивление. При этом уменьшится общее термическое сопротивление и увеличится тепловой поток, а температура поверхности такой стенки приблизится к температуре омывающей ее среды. Поэтому наличие рёбер может использоваться как средство интенсификации процесса теплопередачи или как средство снижения температуры стенки.

Рассмотрим теплопередачу через ребристую стенку, изображенную на рис. 14. Плоская стенка толщиной δ с одной стороны имеет оребрение. Стенка с двух сторон омывается теплоносителями с температурами $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$ $\left(t_{ж1} > t_{ж2}\right)$.

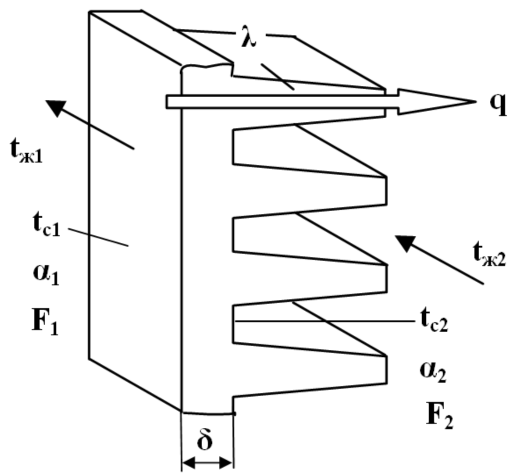

Рис. 14. Схема процесса теплопередачи через ребристую стенку от диаметра тепловой изоляиии

Температура ребра изменяется по его длине. Температура ребра у основания равна температуре поверхности между рёбрами t_{c2} и будет уменьшаться к их концу. Температуру среды $t_{ж2}$ можно считать неизменной для всей поверхности, и поэтому участки поверхности ребра, удаленные от основания, будут передавать меньше теплоты, чем участки, расположенные вблизи основания ребра.

Отношение теплоты Q_P, передаваемой поверхностью рёбер к теплоносителю 2, к теплоте, которую эта поверхность могла бы передать при постоянной температуре стенки, равной температуре у основания рёбер Q'_P, называется **коэффициентом эффективности рёбер**:

$$\eta_P = \frac{Q_P}{Q'_P}. \tag{71}$$

Вся поверхность рёбер может иметь одинаковую температуру только при бесконечно большой теплопроводности материала, поэтому в реальных условиях $\eta_p < 1$. Чем резче меняется температура вдоль ребра, тем меньше коэффициент его эффективности. Для коротких рёбер, выполненных из материала с большим коэффициентом теплопроводности, коэффициент эффективности близок к единице.

Определим тепловой поток через стенку, гладкая поверхность которой имеет площадь F_1, а ребристая поверхность F_2. Площадь F_2 складывается из площади боковой поверхности рёбер F_P и площади межрёберных участков F_M. При стационарном режиме количество теплоты в процессе теплоотдачи от среды 1 к стенке, в процессе теплопроводности через стенку и в процессе теплоотдачи от стенки к холодной среде 2 (при одинаковом коэффициенте теплоотдачи для всей поверхности F_2) выразится формулами:

$$Q = \alpha_1 (\mathrm{t}_{ж1} - \mathrm{t}_{c1}) F_1, \tag{72}$$

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} (\mathrm{t}_{c1} - \mathrm{t}_{c2}) F_1, \tag{73}$$

$$Q = Q_P + Q_M. \tag{74}$$

Так как

$$Q_P = \eta_P Q'_P = \eta_P \alpha_2 (\mathrm{t}_{c2} - \mathrm{t}_{ж2}) F_P \,, \qquad (75)$$

$$Q_M = \alpha_2 (\mathrm{t}_{c2} - \mathrm{t}_{ж2}) F_M \,, \qquad (76)$$

то уравнению (74) можно придать вид

$$Q = \alpha_2 \left(t_{c2} - t_{ж2} \right) \left(F_M + \eta_P F_P \right) \qquad (77)$$

Исключив из уравнений (72), (73) и (77) температуры t_{c1} и t_{c2} найдем:

$$Q = \frac{\left(\mathrm{t}_{ж1} - \mathrm{t}_{ж2} \right)}{\dfrac{1}{\alpha_1 F_1} + \dfrac{\delta}{\lambda} \dfrac{1}{F_1} + \dfrac{1}{\alpha_2 (F_M + \eta_P F_P)}} \qquad (78)$$

Это уравнение можно привести к виду:

$$Q = k_P (\mathrm{t}_{ж1} - \mathrm{t}_{ж2}) F_1 \,, \qquad (79)$$

где k_P - **коэффициент теплопередачи ребристой стенки**, который определяется формулой:

$$k_P = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{\delta}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_2} \dfrac{F_1}{(F_M + \eta_P F_P)}} \,. \qquad (80)$$

Знаменатель этого выражения представляет собой сумму термических сопротивлений участков теплопереноса. Выражение (80) по структуре аналогично выражению для коэффициента теплопередачи через плоскую стенку. Анализируя это выражение можно установить, что количественно коэффициент теплопередачи всегда меньше меньшего коэффициента теплоотдачи. Поэтому, используя оребрение с этой стороны, можно уменьшить его термическое сопротивление и увеличить коэффициент теплопередачи и тепловой поток.

Контрольные вопросы

1. Физические условия интенсификации теплопередачи при использовании ребристой стенки.

2. Коэффициент эффективности ребра.

3. Коэффициент теплопередачи ребристой стенки, его размерность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А.П., Бэр Б.В., Витт О.К.* и др. Теплотехника. - М: Энергоатомиздат, 1991. - 224с.

2. *Болгарский А.В., Мухачев Г.А., Щукин В.К.* Термодинамика и теплопередача. - М: Высшая школа, 1975. - 495с.

3. *Болгарский А.В., Голдобеев В. И., Идиатуллин И.С., и др.* Сборник задач по термодинамике и теплопередаче. - М: Высшая школа, 1972. - 304с.

4. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. -М.:Высшая школа, 1967.-600 с.

5. *Мазур Л.С.* Техническая термодинамика и теплотехника. Учебник для ВУЗов. - М.: ГЭОТАР-МЕД, 2003. - 352 с.

6. *Мучник Г.Ф., Рубашов И.Б.* Методы теории теплообмен. Ч. 1. Теплопроводность. - М.: Высш. школа, 1970. - 288 с.

7. *Теория тепломассообмена*: учебник для ВУЗов / Исаев С.И., и др.; под ред. А.И. Леонтьева. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. - 684 с.

8. *Теплотехника.* учебник для ВУЗов / под ред. В.И. Крутова. - М.: Машиностроение, 1986.

9. *Шнейдер П.* Инженерные проблемы теплопроводности. - М.: Иностранная литература, 1960. - 478 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА
Часть I
ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Методические пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *Л.Н. Киншт*
Компьютерная вёрстка *Н.В. Гаврилова*

Подписано в печать 17.12.2010. Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная.
Тираж 100 экз. Уч.-изд. л. 2,55 Печ. л. 2,75 Изд. № 351 Заказ № 172
Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20